**§ 5. Притяжение сфер**

Посмотрим, в качестве примера рассуждений Ньютона, как он доказывал, что на камень внутри Земли внешние слои не действуют, т.е. что *поле тяжести внутри однородной сферы равно нулю*. Раньше этот факт изучался в школе, но теперь он из программы выпал, поэтому это замечательное доказательство, возможно, известно не всем.


Рис. 6. Притяжение шарового слоя по Ньютону

Рассмотрим внутри шара, ограниченного бесконечно тонким шаровым слоем, точку *P* (рис. 6), возьмём маленький телесный угол с вершиной в *P* и докажем, что силы, с которыми на помещённое в точке *Р* тело действуют два бесконечно малых объёма, высекаемых этим углом из шарового слоя, уравновешиваются. (Сейчас, преподавая анализ, не очень-то любят говорить о бесконечно малых величинах, из-за чего современные студенты не вполне владеют этим языком. Между тем им всё-таки владеть надо.) Эти два объёма представляют собой бесконечно малые призмы (их образующие, конечно, слегка расходятся, но величиной этого раствора можно пренебречь, так как ошибка будет бесконечно малой более высокого порядка), объёмы которых можно вычислять по формуле *V* = *lS*, где *l* — длина бокового ребра, a *S* — площадь поперечного сечения. Но рёбра у наших призм равны как отрезки, высекаемые на прямой парой концентрических окружностей, а поперечные сечения относятся как квадраты расстояний до *Р*. Таким образом, эти два объёма тянут тело в точке *Р* в разные стороны с одинаковыми силами. Точно так же уравновешиваются и все другие влияния, поэтому равнодействующая всех сил равна нулю.

Этот образчик ньютоновского рассуждения показывает, как можно было решать задачи из теории потенциала без анализа, не зная ни теории гармонических функций, ни фундаментального решения уравнения Лапласа, ни потенциалов простого и двойного слоя. Подобные рассуждения, предшествовавшие возникновению анализа, часто встречались в работах тех времён и оказывались чрезвычайно мощными. Вот пример задачи, которую люди вроде Барроу, Ньютона, Гюйгенса решили бы за считанные минуты[8](http://ega-math.com/Books/Arnold.htm%22%20%5Cl%20%22note8) и которую современные математики быстро решить, по-моему, не способны (во всяком случае, я ещё не видел математика, который быстро бы с ней справился): вычислить

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  lim   | sin tg *x* – tg sin *x*arcsin arctg *x* – arctg arcsin *x* |  . |
| *x* → 0  |  |

Ньютон доказал также, что *однородный шар* (или шаровой слой) *притягивает точки внешней области так же, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре*. Доказательство Ньютона элементарно, но не просто (как не просто в лоб посчитать соответствующий интеграл). Приведённое ниже современное доказательство (восходящее к Лапласу), к сожалению, выходит за рамки преподаваемых в школе (и, как это ни странно, на механико-математическом факультете МГУ) наук.

Рассмотрим поле скоростей несжимаемой жидкости, заполняющей всё пространство и сферически-симметрично растекающейся по радиусам от находящегося в начале координат источника. Скорость такого течения обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.

Действительно, вследствие несжимаемости, через каждую сферу с центром в источнике за единицу времени протекает одинаковый поток жидкости (столько, сколько производит источник). Вследствие сферической симметрии течения, этот поток равен произведению площади сферы на величину скорости протекания через неё. Но площадь сферы прямо пропорциональна квадрату радиуса. Значит, чтобы поток не зависел от радиуса, величина скорости должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника,

Итак, *закон убывания скорости сферически-симметричного течения несжимаемой жидкости с расстоянием от центра такой же, как закон убывания силы тяготения*. (Отсюда видно, как выглядит естественный аналог поля тяготения в *n*-мерном пространстве: сила должна убывать обратно пропорционально (*n*–1)-й степени расстояния.)

Мы доказали, что поле силы притяжения материальной точкой обладает следующим замечательным свойством *несжимаемости*: если считать его полем скоростей течения, то величина потока через границу любой ограниченной области, не содержащей притягивающую точку, равна нулю: сколько втекает, столько и вытекает.

Оказывается, при любом распределении масс поле силы притяжения этими массами вне этих масс обладает таким же свойством несжимаемости. Действительно, при сложении полей скоростей величины их потоков через любую поверхность складываются. Поэтому при сложении полей скоростей двух течений несжимаемой жидкости вновь получится поле скоростей несжимаемой жидкости: поток суммарного поля через границу области равен нулю, если равны нулю потоки складываемых полей. Итак, *суммарная сила притяжения несколькими массами обладает свойством несжимаемости* (в области вне притягивающих масс).

В частности, рассмотрим поле силы притяжения однородным шаром (или шаровым слоем). Во внешней области это поле совпадает с полем скоростей несжимаемой жидкости (как только что доказано). Оно сферически-симметрично. Но единственное сферически симметричное поле скоростей несжимаемой жидкости обратно пропорционально квадрату расстояния до центра. Значит, шар (или слой) притягивает внешние точки так же, как некоторая масса, помещённая в центр. Что масса в центре должна совпадать с полной массой шара (или слоя), видно из сравнения потоков через сферы, охватывающие исследуемый шар.

Теорема о том, что слой не притягивает внутренние точки, также следует из этого рассуждения. (Задача. Вычислить среднее значение функции 1/*r* по сфере (*x*–*a*)2 + (*y*–*b*)2 + (*z*–*c*)2 = *R*2 и функции ln 1/*r* по окружности (*x*–*a*)2 + (*y*–*b*)2 = *R*2.) [Обе теоремы Ньютона (о притяжении сферическими слоями внутренних и внешних точек) распространяются и на притяжение слоями между гомотетичными эллипсоидами (роль центра играет при этом любой конфокальный эллипсоид, меньший изучаемого). Эллипсоиды можно даже заменить алгебраическими поверхностями любой степени[9](http://ega-math.com/Books/Arnold.htm%22%20%5Cl%20%22note9). Важно лишь, чтобы поверхность была гиперболической (пересекала каждую прямую, выходящую из некоторой точки, столько раз, какова степень уравнения поверхности).]